1. Линейни действия със свободни вектори. Векторни пространства. Бази и координатни системи

Задача 1.1 Да се докаже, че радиус-вектора на пресечната точка на диагоналите на произволен успоредник е средно аритметичен на радиус-векторите на върховете му.

Задача 1.2 Докажете, че точките, симетрични на дадена точка относно средите на страните на произволен пространствен четириъгълник, са върхове на успоредник.

Задача 1.3 Установете кое от следните множества е векторно пространство и в такъв случай намерете размерността му, и посочете една база:

а) множеството $A = \{\lambda - (\lambda + \mu)x^2 + 3\mu x^3 \in \mathbb{R}_3[x]\}$;

б) множеството от матрици от вида $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$;

в) множеството $B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R} \mid x - 2y + 3t = 0\}$.

Задача 1.4 Докажете, че полиномите $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2, p_4 = x^3$ и полиномите $q_1 = 1+x+x^2+x^3$, $q_2 = 1+x+x^2$, $q_3 = 1+x$, $q_4 = 1$ образуват база на векторното пространство $\mathbb{R}_3[x]$. Намерете координатите на полинома $f = 2-3x+5x^2$ спрямо двете бази.

Задача 1.5 Нека MNP е триъгълник, а точките A, B, C и D са определени съответно от равенствата: $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MN}-4\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MN}+2\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{MP}$.

а) Докажете, че правите AB и CD се пресичат и намерете координатите на пресечната им точка E относно координатната система с начало M и координатни вектори $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$.

б) Докажете, че точките N, P и E са колинеарни.