4. Ранг на матрица, система вектори, линейно преобразуване. Системи линейни уравнения

Задача 4.1 Намерете ранга на:

а) матрицата

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

б) линейното преобразуване f на $\mathbb{R}_3[x]$, определено от

$$f\big(p(x)\big) = p(x+1) - p(x), \quad p(x) \in \mathbb{R}_3[x].$$

Задача 4.2 Дадена е системата от линейни уравнения

$$\left|\begin{array}{l} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2. \end{array}\right.$$

а) Да се реши системата при $\lambda = -2$, $\lambda = 1$ и $\lambda = 2$.

б) Да се изследва и реши системата за $\lambda \in \mathbb{R}$.

Задача 4.3 Да се реши системата от линейни уравнения

$$\left|\begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{array}\right.$$

Задача 4.4 Нека f е линейно преобразуване на $\mathbb{R}^4$, за което $f(\overrightarrow{e}_1) = 3\overrightarrow{e}_1 + 2\overrightarrow{e}_2 + 4\overrightarrow{e}_3 + 7\overrightarrow{e}_4$, $f(\overrightarrow{e}_2) = 4\overrightarrow{e}_1 - 3\overrightarrow{e}_2 + 11\overrightarrow{e}_3 - 2\overrightarrow{e}_4$, $f(\overrightarrow{e}_3) = -5\overrightarrow{e}_1 + 3\overrightarrow{e}_2 - 13\overrightarrow{e}_3 + \overrightarrow{e}_4$, $f(\overrightarrow{e}_4) = 4\overrightarrow{e}_1 - 2\overrightarrow{e}_2 + 16\overrightarrow{e}_3 + 3\overrightarrow{e}_4$. Да се намери $\ker f$ и да се посочи една негова база.

Задача 4.5 Да се определи матрицата X от уравнението

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$