5. Векторно и смесено произведение

Задача 5.1 Да се докаже тъждеството

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)^2\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}\right)^2 - \left[\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}\right)\right]^2 = a^2\left(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\right)^2.$$

Задача 5.2 Дадени са векторите $\overrightarrow{a}(1,-1,2)$, $\overrightarrow{b}(2,1,-1)$ и $\overrightarrow{c}(-1,2,1)$. Да се намерят координатите на векторите $\overrightarrow{p} = \frac{\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}}{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}}$, $\overrightarrow{q} = \frac{\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}}{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}}$, $\overrightarrow{r} = \frac{\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}}{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}}$. Да се намерят координатите на вектора $\overrightarrow{x}$, определен от равенствата

$$\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{x} = -\overrightarrow{q}\,\overrightarrow{x} = \frac{1}{2}\overrightarrow{r}\,\overrightarrow{x} = 1.$$

Задача 5.3 Дадени са точките $A(1,2,-3)$, $B(5,2,0)$, $C(3,2,-2)$. Да се намери разстоянието от точка C до правата AB.

Задача 5.4 Дадени са точките $M(2,0,0)$, $A(2,1,0)$ и векторите $\overrightarrow{p}(1,1,2)$, $\overrightarrow{q}(1,0,-1)$. Да се намери разстоянието от точката M до равнината, определена от точката A и векторите $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{q}$.